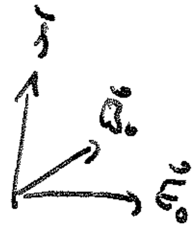
VI.2. Polarisation ebener Wellen

<u>Wdh.:</u>

$$\vec E = \vec E_0\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}$$
$$\vec B = \vec B_0\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}$$

$$\vec E_0 \perp \vec B_0 \perp \vec k$$
$$|\vec B_0| = \frac{1}{c}|\vec E_0|$$



o.B.d.A. $\vec k = k\hat e_z$. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec E = \left(E_{0x}\hat e_x + E_{0y}\hat e_y\right) e^{i(kz-\omega t)} \\ \vec B = \frac{1}{c}\left(-E_{0y}\hat e_x + E_{0x}\hat e_y\right) e^{i(kz-\omega t)} \end{cases} \qquad (*)$$

mit $E_{0x}, E_{0y} \in \mathbb{C}$.

Wir diskutieren nun das $\vec E$-Feld, da das $\vec B$-Feld durch das $\vec E$-Feld eindeutig festgelegt ist.

$$E_{0x} = |E_{0x}|e^{i\varphi}, \qquad E_{0y} = |E_{0y}|e^{i(\varphi+\delta)}$$

Für das <u>reelle</u>, physikal. $\vec E$-Feld gilt dann

$$\vec E = E_x\hat e_x + E_y\hat e_y$$

mit
$$E_x = |E_{0x}|\cos(kz-\omega t+\varphi)$$
$$E_y = |E_{0y}|\cos(kz-\omega t+\varphi+\delta)$$

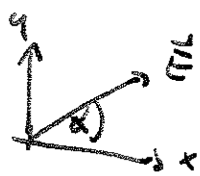
① $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$

$$\Rightarrow \vec E = \left(|E_{0x}|\hat e_x \pm |E_{0y}|\hat e_y\right)\cos(kz-\omega t+\varphi),$$
$$|\vec E| = \sqrt{|E_{0x}|^2+|E_{0y}|^2}$$

Zeit- und orts<u>un</u>abhängiger Vektor, d.h. die elektr. Feldstärke $\vec E$ schwingt relativ zur Ausbreitungsrichtung in einer <u>festen</u> Richtung.

<u>linear</u> <u>polarisiert</u>

Richtung von $\vec E$: Polarisationsrichtung.



$$\tan\alpha = \frac{\pm|E_{0y}|}{|E_{0x}|}$$

$\vec E$ in (*) hat zwei Terme, die wir auch separat als lin. pol. Welle auffassen können.

$\Rightarrow$ Jede beliebig pol. Welle = Überl. von 2 lin. unabh. lin. pol. Wellen.

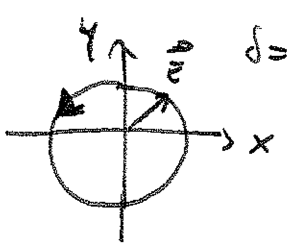
(2) $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$, $|E_{0x}| = |E_{0y}| \equiv E$

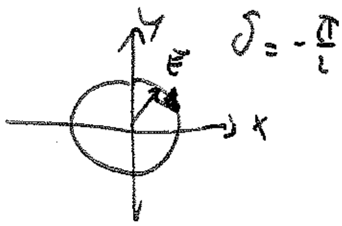
$\Rightarrow$ für die reelle, phys. Welle:

$$\vec{E} = E\left[\cos(kz-\omega t+\varphi)\,\hat{e}_x \mp \sin(kz-\omega t+\varphi)\,\hat{e}_y\right]$$

Das ist, für festes z, die parametrische Darst. eines Einheitskreises mit Radius E. Der $\vec{E}$-Vektor durchläuft den Kreis mit Winkelgeschw. ω in einer Ebene $\perp \vec{k} = k\hat{e}_z$. $\rightsquigarrow$

<u>zirkular polarisiert</u>



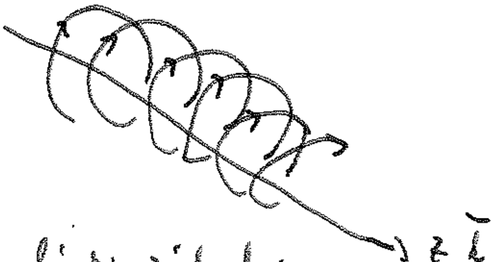


$\vec{k}$ zeigt $\perp$ aus Zeichenebene hinaus.

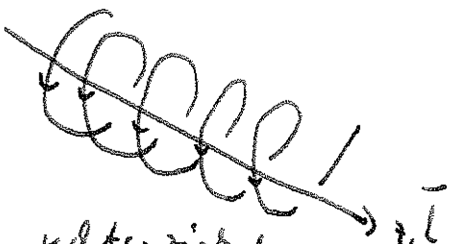
Bei Blick in die pos. z-Richtung (d.h. in Ausbreitungsrichtung) dreht $\vec{E}$-Vektor bei $\delta = +\frac{\pi}{2}$ rechts herum, bei $\delta = -\frac{\pi}{2}$ links herum.

rechts-/links-polarisierte Welle.

Mit vollst. Raum-Zeit-Bewegung:



links-zirkular



rechts-zirkular.

(3) $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$, $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$!

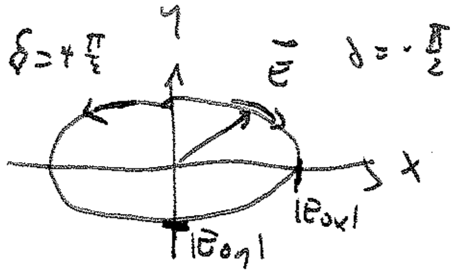
$$\rightsquigarrow \begin{cases} E_x = |E_{0x}|\cos(kz-\omega t+\varphi) \\ E_y = \mp|E_{0y}|\sin(kz-\omega t+\varphi) \end{cases}$$

ist parametrische Darst. von Punkten mit

$$\left(\frac{E_x}{|E_{0x}|}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|}\right)^2 = 1$$

$\rightsquigarrow$ Ellipse mit Halbachsen $|E_{0x}|$ und $|E_{0y}|$

<u>elliptisch polarisierte Welle</u>

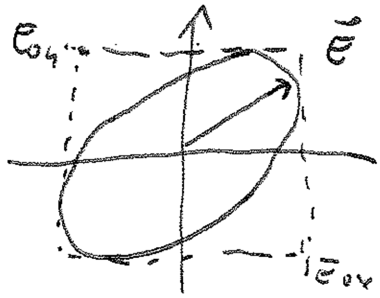


Amplitude von $\vec{E}$ nicht mehr konstant.

(4) δ beliebig, $|E_{0x}| \neq |E_{0\eta}|$

<u>elliptisch polarisiert</u>

mit verdrehter Ellipse.



Jede beliebig (ellipt.) polarisierte Welle = Summe zweier lin. pol. Wellen (✓)

= Summe zweier entgegengesetzt zirkular polarisierter Wellen.

<u>Bew:</u> $\hat{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_\eta)$

so dass: $\hat{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_+ + \hat{e}_-)$, $\quad \hat{e}_\eta = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\hat{e}_+ - \hat{e}_-)$

$$\Rightarrow E_{0x} \hat{e}_x + E_{0\eta} \hat{e}_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\underbrace{(E_{0x} - i E_{0\eta})}_{E_+ e^{i\gamma_+}} \hat{e}_+ + \overbrace{(E_{0x} + i E_{0\eta})}^{E_- e^{i\gamma_-}} \hat{e}_- \Big]$$

da das komplexe Größen sind. $E_\pm \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[E_- e^{i(kz - \omega t + \gamma_-)} \hat{e}_+ + E_+ e^{i(kz - \omega t + \gamma_+)} \hat{e}_- \Big]$$

mit (phys.) Realteil

$$\mathrm{Re}\,\vec{E} = \frac{1}{2} E_- \left[\cos(kz - \omega t + \gamma_-) \hat{e}_x - \sin(kz - \omega t + \gamma_-) \hat{e}_\eta \right]$$

$$+ \frac{1}{2} E_+ \left[\cos(kz - \omega t + \gamma_+) \hat{e}_x + \sin(kz - \omega t + \gamma_+) \hat{e}_\eta \right] \quad \text{q.e.d.}$$

VI.3. Wellenpakete

Allgemein hatten wir Lsgn der Wellengl. der Form

$$f_\pm(kz \pm \omega t) \qquad (\text{o.B.d.A } \vec{k} = k\hat{e}_z)$$

wobei lediglich $c = \frac{\omega}{k}$ gilt.

Nimmt man k als freie Variable an, so ist ω festgelegt, ansonsten hat man aber jede Freiheit.

$$\leadsto \quad F_\pm(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k)\, f_\pm(kz \pm \omega t)\, dk$$

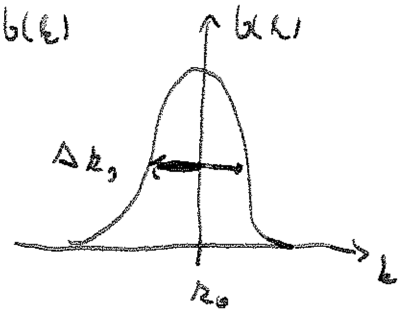
allgemeinste Überlagerung von Lsgn. mit festem k.
Die <u>Gewichtsfunktion</u> $a(k)$ ist völlig beliebig!

Bis jetzt monochromatische (ebene) Welle ($\rightarrow$ phys. nicht sehr "real")

- Überlagerung ebener Wellen:

$$F_\pm(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(k)\, e^{i(kz \pm \omega t)}\, dk$$

z.B. $b(k)$



$b(k)$ eine um k_0 mehr oder weniger scharf konzentrierte Verteilung.

Sei nun <u>Dispersion</u> vorhanden, d.h. $\varepsilon_r \neq 1$, $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$

$\Rightarrow$ $\omega = \omega(k)$ komplizierter als $\omega = ck$ mit fester Phasengeschw. c $\forall k$.

Bei solchen Verteilungen $b(k)$ können wir aber um k_0 entwickeln:

$$\omega(k) = \underbrace{\omega(k_0)}_{\equiv \omega_0} + (k - k_0)\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} + \dots$$

$$v_{gr} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} = \text{Gruppengeschw.}$$

Dispersionsfreie Medien: Phasengeschw. = Gruppengeschw.

$$e^{i(kz\pm\omega t)} = e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}\, e^{iq(z\pm v_{gr} t)} + \dots \qquad (q = k - k_0)$$

Wenn die Verteilung $b(k)$ scharf gepeakt ist, so reicht die Taylorentwicklung bis zur linearen Ordnung.

$$F_\pm(z,t) \approx e^{i(k_0 z\pm\omega_0 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, b(k_0+q)\, e^{iq(z\pm v_{gr}t)}$$

$$= \underbrace{e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}}_{\text{ebene Welle}}\ \underbrace{H_\pm(z\pm v_{gr} t)}_{\text{Modulationsfkt}}$$

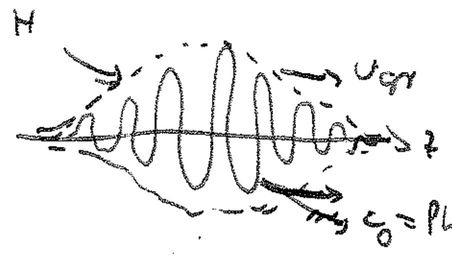
$F_\pm(z,t)$ = ebene Welle, deren Wellenlänge und Frequenz dem Maximum von $b(k)$ entsprechen, moduliert mit orts- und zeitabh. Fkt. $H_\pm$.

$H_\pm$ bewegt sich mit der Gruppengeschw. v_{gr} in posit. (+) bzw. neg. (−) Richtung auf der z-Achse.

Konstante Modulationsphase $z \pm v_{gr} t \equiv \text{const} \Rightarrow$

$$\frac{dz}{dt} = \mp v_{gr} \quad ✓$$

⇝ Wellenpaket

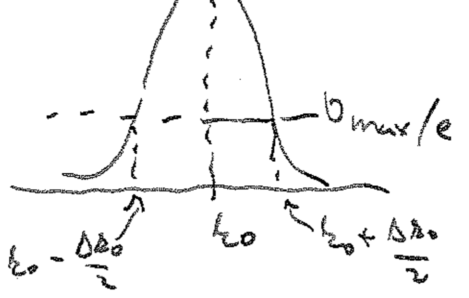


Welle läuft mit Phasengeschw. $c_0 = \frac{\omega_0}{k_0}$

Paket mit Gruppengeschw. v_{gr}.

Bsp. Gaußsches Wellenpaket

$$b(k) = \frac{2}{(\Delta k_0)\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}\right)$$



Maximum bei $k = k_0$, $b_{max} = \frac{2}{(\Delta k_0)\sqrt{\pi}}$

Fläche unter der "Glocke" ist immer = 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, b(k) = \frac{2}{(\Delta k_0)\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left(-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, I$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2}$$

Wie rechnet man I aus?

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy\, e^{-(x^2+y^2)} \underset{\text{Polarkoord.}}{=} \underbrace{2\pi}_{\text{Winkelintegration } \int_0^{2\pi} d\varphi} \int_0^\infty d\rho\, \rho\, e^{-\rho^2}$$

$$\underset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} -\frac{1}{2}\, 2\pi \int_0^\infty d\rho\, \frac{d}{d\rho} e^{-\rho^2} = \pi$$

$$\Rightarrow\ I = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dk\, b(k) = 1 \quad ✓$$

[Bem: Eine mögliche Darst. als Grenzwert für die δ-Distribution:

$$\delta(k-k_0) = \lim_{\Delta k_0 \to 0} b(k)$$]

Einsetzen der Gauß-Glocke in $M_\pm$ Modulationsfkt.:

$$M_\pm(z \pm v_{gr} t) = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-(4q^2/\Delta k_0^2)}\, e^{iq(z \pm v_{gr} t)}$$

Quadrat. Ergänzung:

$$\frac{4q^2}{\Delta k_0^2} - iq(z \pm v_{gr} t) = \left(\frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0 (z \pm v_{gr} t)\right)^2 + \frac{\Delta k_0^2}{16}(z \pm v_{gr} t)^2$$

Substitution $y = \frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0 (z \pm v_{gr} t)$

Bem: Man kann zeigen: Es ist ok, trotz Im-Teil, Integration auf reeller Achse von $-\infty$ nach $+\infty$ zu führen

$$\Rightarrow H_\pm(z \pm v_{gr}t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, I\, e^{(-\Delta k_0^2/16)(z \pm v_{gr}t)^2}$$

$$F_\pm(z,t) = e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}\, e^{\left(-\frac{\Delta k_0^2}{16}\right)(z \pm v_{gr}t)^2}$$

Ebene Welle, Amplitude hängt gaußförmig von $(z \pm v_{gr}t)$ ab

Gauß-Glocke bewegt sich starr mit Geschw. v_{gr} in $\mp$ z-Richtung.

Breite des Wellenpaketes: $\Delta z = \frac{8}{\Delta k_0}$, also invers.

$$\Delta z \cdot \Delta k_0 \hat{=} \text{const.}$$

$G(k) \xrightarrow[\Delta k_0 \to 0]{} \delta(k - k_0) \Rightarrow \quad F_\pm(z,t) \xrightarrow[\Delta k_0 \to 0]{} e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}$ Ebene Welle.